Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение

высшего образования

«Саратовский государственный технический университет

имени Гагарина Ю.А.»

Институт электронной техники и приборостроения

Кафедра Информационная безопасность автоматизированных систем

Специальность 10.05.03 Информационная безопасность автоматизированных систем

**КУРСОВОЙ ПРОЕКТ**

по дисциплине «Вычислительная математика»

по теме «Вариационные методы. Метод Галеркина»

|  |  |
| --- | --- |
|  | Выполнил: студент 3 курса  учебной группы с-ИБС31  очной формы обучения  Копытин Д.В.\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_  Руководитель проекта:  проф. каф. ИБС Байбурин В.Б.  Комиссия по защите:  проф. каф. ИБС Байбурин В.Б.  доцент каф. ИБС Кожанова Е.Р. |

Курсовой проект защищен на оценку \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

(дата, подпись члена комиссии)

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

(дата, подпись члена комиссии)

Саратов 2021

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение

высшего образования

«Саратовский государственный технический университет

имени Гагарина Ю.А.»

Кафедра Информационная безопасность автоматизированных систем

**Задание на курсовой проект**

студенту 3 курса учебной группы с-ИБС31

Институт электронной техники и приборостроения

Копытину Дмитрию Владимировичу

по дисциплине «Вычислительная математика»

по теме «Вариационные методы. Метод Галеркина»

Сроки выполнения работы 10.03.2021 г.- 05.06.2021г.

Защита работы 05.06.2021 г.

Руководитель проекта Байбурин В.Б.

Задание принял к исполнению Копытин Д.В.

**Содержание**

|  |  |
| --- | --- |
| Введение | 4 |
| 1. Основные понятия вариационного метода Галеркина | 6 |
| 1.1. Выбор специального базиса | 9 |
| 1.2. Кусочно-линейный базис (метод конечных элементов) | 10 |
| 2. Постановка задачи | 13 |
| 2.1. Формулирование задачи | 13 |
| 2.2. Решение задачи | 13 |
| 3. Программная реализация и тестирование | 15 |
| 3.1. Выбор языка программирования и построение блок-схемы | 15 |
| 3.2. Программная реализация | 15 |
| 3.3. Тестирование программы | 15 |
| Заключение | 18 |
| Список использованных источников | 19 |
| Приложение А. Блок-схема программы | 21 |
| Приложение Б. Листинг программы | 23 |

### **Введение**

Интерес к различным экстремальным задачам возник еще с далёкой древности. Люди искали «наилучший» среди всех возможных способ решения стоящих перед ними задач.

В математической физике методы приближенного решения дифференциальных и интегральных уравнений, основанные на сведении задач к решению системы алгебраических уравнений, принято называть прямыми методами [1].

Прямые методы широко применяют непосредственно для построения приближенных решений задач, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями и уравнениями в частных производных, а также вариационных задач, к которым сводятся соответствующие задачи математической физики. Такого рода задачи встречаются на разных стадиях научно-технических исследований.

Вариационная формулировка большинства физических задач удобна при нахождении приближенных решений.

Сущность многих из вариационных методов состоит в формулировке рассматриваемой задачи математической физики в вариационной форме как задачи об отыскании функции, реализующей минимум (или, в общем случае, экстремум) некоторого функционала, и в последующем нахождении приближений к этой функции.

Одним из методов решения вариационных задач математической физики, является метод Галёркина [2]. Он даёт приближенное решение дифференциального уравнения в виде линейной комбинации элементов заданной линейно независимой системы функций.

Цель курсового проекта – изучить метод Галеркина, как один из вариационных методов решения краевой задачи с программной реализацией.

Для решения поставленной задачи необходимо решить ряд задач:

1) изучить основные понятия вариационного метода Галеркина для решения краевой задачи.

2) сформулировать задачу для дальнейшей программной реализации.

3) выполнить реализацию и тестирование программной реализации поставленной задачи.

Курсовой проект состоит из введения, трех глав, заключения, списка использованных источников и двух приложений. В приложение А представлена блок-схема программы. В приложении Б содержатся листинги программы.

# **Основные понятия вариационного метода Галеркина**

Вариационный метод — метод решения математических задач с помощью минимизации определённого функционала, используя пробную функцию, которая зависит от небольшого количества параметров.

Вариационный метод даёт лучшее приближение к энергии основного состояния для данной формы пробной функции. При удачно выбранной пробной функции это приближение может быть достаточно точным, незначительно отличаясь от того, что наблюдается на эксперименте [3]. Удачно выбранная пробная функция позволяет также делать качественные выводы о поведении квантово-механической системы.

В начале XX в. известными механиками, сначала Бубновым И. Г., а затем Галеркиным Б. Г. был предложен метод решения однородных краевых задач для дифференциальных уравнений, называемый методом Галеркина – метод нахождения приближенного решения дифференциального уравнения в виде линейной комбинации элементов заданной линейно независимой системы функций.

Рассмотрим краевую задачу:

Эту краевую задачу легко можно свести к однородной с помощью замены , где функция *y\** удовлетворяет краевым условиям, например, , где

Таким образом, не уменьшая общности, можно считать краевую задачу однородной:

Будем искать приближенное решение этой краевой задачи в виде:

.

Система функций *φ1(x), φ2(x)…, φn(x)* называется базисной, или координатной системой [5].

Рассмотрим скалярные произведения левой и правой частей основного уравнения на базисные функции.

Скалярным произведением двух функций называется интеграл от их произведения

Если

то , тогда уравнение (6) примет вид:

Получившееся уравнение называется моментным, или проекционным, его можно расписать подробнее, учитывая, что:

,

.

Обозначим , тогда система моментных уравнений примет вид:

, для *i=1, 2,…,n.*

Запишем систему в привычном виде:

,

… ……. ….…. ….…. ……. …… ..….,

Это система линейных алгебраических уравнений, число неизвестных совпадает с числом уравнений. Если такую систему решить, можно найти коэффициенты *c1, c2, …, cn* и записать ответ, приближенное решение однородной краевой задачи .

При решении краевой задачи методом Галеркина можно выделить три основных этапа:

1) выбор базисной системы *φ1(x), φ2(x), …;*

2) численное решение моментных уравнений;

3) предельный переход при *n→∞*.

В практических задачах ограничиваются конечным числом базисных функций, т.е. следует рассмотреть только первые два этапа. Будем считать, что с решением системы линейных уравнений трудностей не возникает [6].

Исследуем подробнее пункт 1. Теоретически имеем: для любых однородных краевых условий из задачи (5):

,

всегда можно найти базисную систему функций, удовлетворяющих этим краевым условиям. Однако на практике выбор этой системы может представить значительные затруднения. Чаще в базис входит две – три базисные функции, которые выбирают из следующих соображений: *φ1(x)* имитирует предполагаемое поведение ответа, а *φ2(x)* и *φ3(x)* – невязки. Однако имеются и некоторые общие способы выбора таких базисных систем.

Рассмотрим два таких случая:

1) специальный базис;

2) кусочно-линейный базис (метод конечных элементов).

# **Выбор специального базиса**

Выбор специального базиса связан с понятием собственных элементов (собственных функций) дифференциальных уравнений [7].

Допустим, что краевые условия таковы, что дифференциальный оператор , действующий на функцию *y(x)*, удовлетворяющую этим условиям, есть самосопряженный оператор, т.е. скалярное произведение *(y'', φ)= (y, φ'')* для любых функций *y(x), φ(x)*, удовлетворяющих краевым условиям.

Самосопряженный оператор имеет чисто точечный спектр, т.е. существует конечная система собственных чисел *λ1, λ2, …, λn* и соответствующая система собственных функций *φ1, φ2, …, φn,* таких что , где *1 ≤ k ≤ n.*

Система {*φk*} образует ортогональный базис в *L2* на (*a; b*). Эту систему и принимают за базисную систему в методе Галеркина.

**Примеры:**

1. , *y(a)=0, y(b)=0.* Ищем решение, удовлетворяющее этим условиям – первая краевая задача:

, *k=1, 2, …, n*.

2), *y'(a)=0*,  *y'(b)=0*,(x-a).

3) , *y(a)=0, y'(b)=0*(x-a), k=0,1… .

Приближения *yn(x)* в методе Галеркина могут обладать следующей особенностью: несмотря на то, что теоретически *yn(x)→ y(x)* при *n→∞*, может случиться, что *y3(x)* дает лучшее приближение, чем *y4(x), …, y7(x)* и лишь *y8(x)* лучшее, чем *y3(x).* Это связано с тем, что сходимость *yn(x)* не является монотонной [7]. Имеются необходимые и достаточные условия монотонной сходимости. В частности, система, образующая ортогональный базис, условиям минимальности, обеспечивающим монотонность, удовлетворяет.

# **Кусочно-линейный базис (метод конечных элементов)**

Метод конечных элементов [9]. Применительно к краевой задаче для обыкновенных дифференциальных уравнений метод конечных элементов есть метод Галеркина при специально выбранном кусочно-линейном базисе.

Уравнение можно привести к дивергентной форме:

(9)

для этого умножим исходное уравнение (9) на функцию *–a(x):*

, при этом функцию *a(x)* выбираем так, чтобы *a'(x)=a(x)∙p(x)*, т.е.

,

.

При таком выборе *a(x)* уравнение (9) можно записать иначе:

,

.

Это и есть дивергентная форма записи дифференциального уравнения.

Будем считать, что дифференциальное уравнение изначально задано в таком виде:

*–(ay')'+q(x)y=f(x)*, (11)

а краевые условия

*y(a0)=0, y(b0)=0*, (12)

где *a(x), q(x)* непрерывны на *[a0,b0]*, в частности, если *a(x)* и *q(x)≥0,* то решение задачи (11), (12) существует и единственно.

Выбор базиса. Разобьем *[a0,b0]* на *n* частей с шагом *h*, *a0=x0< x1<…<xn=b0*, тогда:

(13)

В соответствии с методом Галеркина положим:

 – кусочно-линейная функция, имеющая изломы только в точках *x0, x1, …, xn*: *y(xk)=yk=ck* при *k=1, 2, …, n-1*; *y(x0)=y(xn)=0* – граничные условия выполнены. Для определения *yk* выпишем моментные уравнения Галеркина:

В силу выбора {*φk*} интегрирование идет по интервалу *[xk-1, xk+1].*

Имеем

(14)

Первое слагаемое интегрируем по частям:

где

 на интервале *[xk-1, xk]*, т.к. – кусочно-линейная функция, ломаная.

Аналогично

где

Обозначим Подставляя найденные выражения в формулу (14), получаем:

,

где *k=1, , n-1.*

Это трехдиагональная система, которую можно решить методом прогонки. Таким образом, значения *yk* найдены, задача приближенно решена.

1. **Постановка задачи**

# **Формулирование задачи**

Требуется решить краевую задачу, уравнение которой задаёт распространение тепла в стрежне:

(15)

С граничными условиями:

(16)

Точным решением которого является функция:

.

Граничные условия – есть описание некоторого материального тела, а уравнение описывает движение частиц в стержне.

# **Решение задачи**

В качестве системы базисных функций выберем

(17)

Ограничимся четырьмя функциями Решение будем искать в виде:

Найдём функцию .Так как а , , то получим:

Требуем ортогональности функции к нашим четырём функциям. Это приводит к системе:

, (19)

Решение этой системы линейных уравнений по методу Гаусса имеет следующий ответ:

.

Следовательно,

.

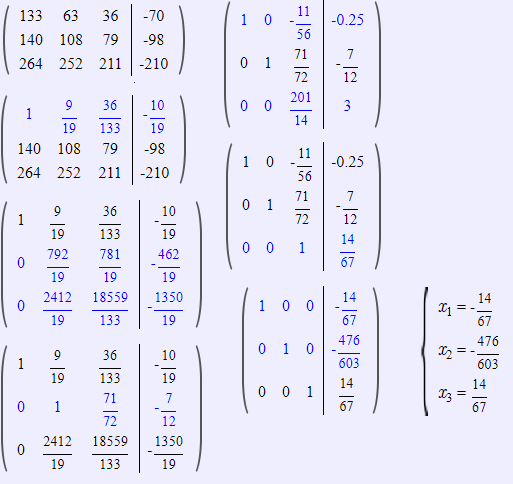


Рисунок 1. – Результат решения задачи при помощи интернет – ресурса

# **Программная реализация и тестирование**

# **Выбор языка программирования и построение блок-схемы**

В рамках курсовой работы был выбран язык программирования Java.

На основании решения задачи в главе 2 данного курсового проекта была построена блок-схема основной программы main (Приложение А).

# **3.2. Программная реализация**

Программа, реализующая вариационный метод Галёркина для конкретной краевой задачи, состоит из основной функции main() (Приложение Б):

# **3.3. Тестирование программы**

В главе 2 курсового проекта был произведен расчет следующими инструментами:

1. MS Excel.

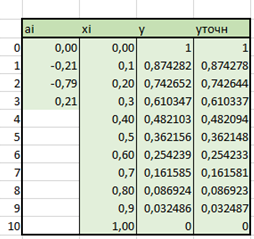


Рисунок 2. – Результат решения задачи в MS Excel

1. Интернет-ресурс.

Полученные есть значения

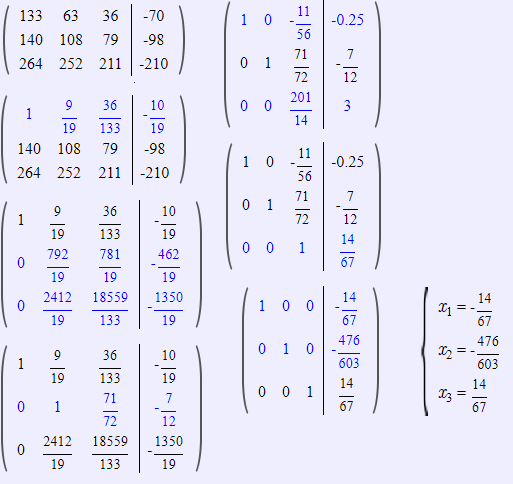


Рисунок 3. – Результат решения задачи при помощи интернет – ресурса

1. Программная реализация.

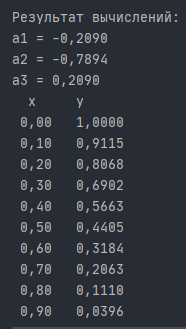


Рисунок 4. – Результат решения задачи при программной реализации

В рамках курсовой работы был изучен вариационный метод Галёркина для решения краевых задач, а также написана программа, реализующая решение конкретной задачи, описанной в п.2, на языке java. Результаты программы и ручного расчета совпали см. рис. (2) и (4).

# **Заключение**

В ходе выполнения курсовой работы были решены задачи:

1) изучены основные понятия вариационных методов для решения краевой задачи. В ходе решения был использован вариационный метод Галеркина, так как он даёт приближенное решение дифференциального уравнения в виде линейной комбинации элементов заданной линейно независимой системы функций.

1. сформулирована задача для дальнейшей программной реализации.

Требуется решить краевую задачу, уравнение которой задаёт распространение тепла в стрежне:

с граничными условиями

Произведен расчет при помощи MS Excel и онлайн ресурса (ru.onlinemschool.com). Вывод: расчеты совпали.

3) выполнена реализация на языке программирования Java и тестирование программной реализации поставленной задачи. Программа состоит из основной программы, блок - схема которой приведена в Приложении А, а их листинги в Приложении Б. Выполнено тестирование написанной программы. Результаты программы совпали с результатами расчета в главе 2.

Задача решена, следовательно, цель курсового проекта достигнута.

# **Список использованных источников**

1. Амосов, А. А. Вычислительные методы : учебное пособие / А. А. Амосов, Ю. А. Дубинский, Н. В. Копченова. — 4-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2021. — 579 с.

2. Карчевский, М. М. Уравнения математической физики. Дополнительные главы : учебное пособие / М. М. Карчевский, М. Ф. Павлова. — 2-е изд., доп. — Санкт-Петербург : Лань, 2016. — 151 с.

3. Филимоненкова, Н. В. Конспект лекций по функциональному анализу : учебное пособие / Н. В. Филимоненкова. — Санкт-Петербург : Лань, 2015. — 176 с

4. Филимоненкова, Н. В. Сборник задач по функциональному анализу : учебное пособие / Н. В. Филимоненкова. — Санкт-Петербург : Лань, 2015. — 240 с.

5. Копченова, Н. В. Вычислительная математика в примерах и задачах : учебное пособие / Н. В. Копченова, И. А. Марон. — 4-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2021. — 65 с.

6. Юдович, В. И. Математические модели естественных наук : учебное пособие / В. И. Юдович. — Санкт-Петербург : Лань, 2021. — 152 с.

7. Кононова, А. А. Уравнения математической физики : учебное пособие / А. А. Кононова, А. Л. Белкова. — Санкт-Петербург : БГТУ "Военмех" им. Д.Ф. Устинова, 2019. — 74 с.

8. Галанин, М. П. Методы численного анализа математических моделей / М. П. Галанин, Е. Б. Савенков. — 2-е изд., испр. — Москва : МГТУ им. Баумана, 2018. — 591 с. Болдырев, Ю. Я. Вариационное исчисление и методы оптимизации : учебное пособие / Ю. Я. Болдырев. — Санкт-Петербург : СПбГПУ, 2016. — 199 с.

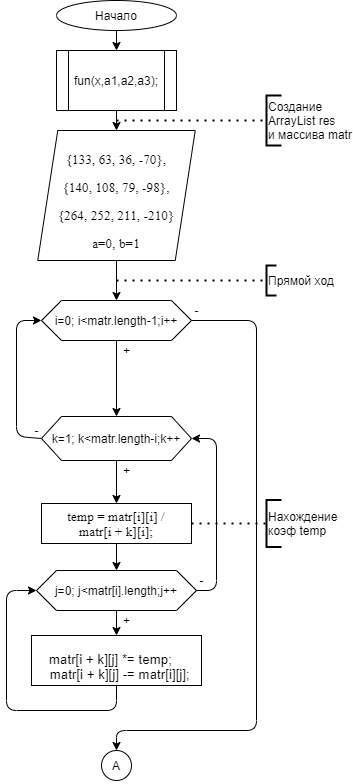
9. Трухан, А. А. Обыкновенные дифференциальные уравнения и методы их решения. Ряды. Элементы вариационного исчисления : учебное пособие / А. А. Трухан, Т. В. Огородникова. — Санкт-Петербург : Лань, 2020. — 152 с.

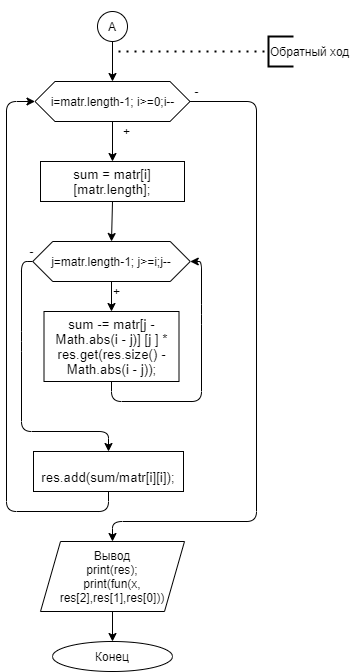
10. Смагина, Т. И. Проекционно-вариационные методы в прикладных задачах : учебное пособие / Т. И. Смагина. — Воронеж : ВГУ, 2016. — 54 с.

# **Приложение А**

**Блок-схема программы**

Блок-схема программы main





# **Приложение Б**

**Листинг программы**

import java.util.ArrayList;

import java.util.List;

public class Main {

public static double fun(double x, double a1,double a2,double a3){//функция

return ((1-x)+(a1\*x\*(1-x))+(a2\*x\*x\*(1-x))+(a3\*x\*x\*x\*(1-x)));

}

public static void main(String[] args) {

Double a = 0.0; //Граничные условия

Double b = 1.0;

List<Float> res = new ArrayList<>();

float[][] matr = new float[][]//Матрица

{

{133, 63, 36, -70},

{140, 108, 79, -98},

{264, 252, 211, -210},

};

float temp = 0,sum = 0;

try {//приводим матрицу к треугольному виду

for (int i = 0; i < matr.length - 1; i++) {

for (int k = 1; k < matr.length - i; k++) {

temp = matr[i][i] / matr[i + k][i];//коэф

for (int j = 0; j < matr[i].length; j++) {

matr[i + k][j] \*= temp;

matr[i + k][j] -= matr[i][j];

}

}

}

}catch (Exception e){

System.out.println("Произошла ошибка, проверьте данные матрицы.");

}

System.out.println("Треугольная матрица");

printArr(matr);

for(int i = 0; i < matr.length;i++){

temp = matr[i][i];

for(int j= i; j<matr[i].length; j ++){//обратный ход

matr[i][j] = matr[i][j] / temp;

}

}

for (int i = matr.length -1; i >= 0; i--) {

sum = matr[i][matr.length];

for (int j = matr.length - 1; j >= i; j--) {

if (Math.abs(i - j) != 0) {

sum -= matr[j - Math.abs(i - j)] [j ] \* res.get(res.size() - Math.abs(i - j));

}

}

res.add(sum / matr[i][i]);

sum = 0;

}

printRes(res);

}

public static void printArr(float [][] matr){

for(int i = 0; i < matr.length; i++){

System.out.println();

for( int j = 0; j < matr[i].length; j++){

if (Math.abs(matr[i][j])==0){

matr[i][j] = 0;

}

System.out.print(" " + matr[i][j] + " ");

}

}

System.out.println();System.out.println();

}

public static void printRes(List<Float> res) {//вывод

System.out.println("Результат вычислений:");

for (int i = res.size();i>0;i--){

System.out.println("a"+(res.size()-i +1)+" = " + String.format("%.4f",res.get(i-1)));

}

System.out.println(" x"+"\t\t"+" y");

for (double i = 0; i<1; i+=0.10){

System.out.println(String.format("%5.2f",i) + "\t" +String.format("%4.4f",fun(i, res.get(2), res.get(1), res.get(0))));

}

}

}